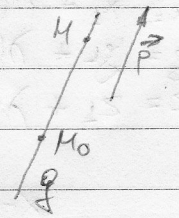
АГ - Иванов (заместник) 30.10.12

Параметрично уравнение на права в пространството

Нека p - права $\quad p: \begin{cases} \ni M_0 \\ \parallel \vec{p} \end{cases}$

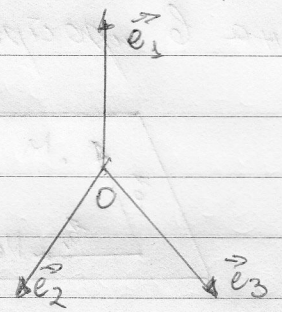


$M \in p \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$

$M \in p \iff \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p}, \lambda \in R \quad (\Phi 1)$

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ - АКС в R^3

АКС - абсолютна координатна система



Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$M(x, y, z)$

$\vec{p}(a, b, c)$

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

Тогава $(\Phi 1)$ ще има вида

1) $p: \begin{cases} x - x_0 = \lambda a \\ y - y_0 = \lambda b \\ z - z_0 = \lambda c \end{cases}$ т.е. $p: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda a \end{cases}$

Скаларни уравнения на p , $\lambda \in (-\infty, \infty)$

$\vec{p}$ - направляващ вектор

т. M - текуща точка на p

λ - параметър на p

Ако означим $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ $\Big\{ \Rightarrow (\Phi 1)$ ще има вида

2) $p: \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{p}$

векторно параметрично уравнение на p

$\vec{r}$ - текущ радиус вектор на M

$$p: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = \lambda \quad (\Phi 2)$$

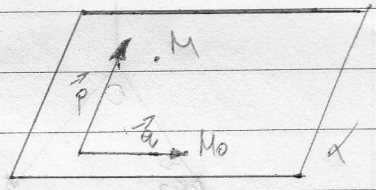
Ако $g: \begin{cases} \ni т.M_1(x_1, y_1, z_1) \\ \ni т.M_2(x_2, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow g: \begin{cases} \ni т.M_1 \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \end{cases}$

$g: \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases}$ - скалярно параметрично уравнение на g зададена с две свои точки

$\Rightarrow g: \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$

Параметрично уравнение на равнина в пространството

Нека $\alpha \begin{cases} \ni т.M_0 \\ \parallel \vec{p}, \parallel \vec{q}, \vec{p} \nparallel \vec{q} \end{cases}$



$\forall$ т.$M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}, \vec{p}, \vec{q}$ - компланарни

$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in R : \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$

т.$M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}, \lambda, \mu \in R$ (Ф3)

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ - АКС в R^3 и

относно K т.$M_0(x_0 y_0 z_0)$; $\vec{p}(p_1 p_2 p_3)$; $\vec{q}(q_1 q_2 q_3)$

Тогава (Ф3) ще има вида

$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 + \mu q_2 \\ z = z_0 + \lambda p_3 + \mu q_3 \end{cases}$ Скалярно параметрично

$\forall \lambda, \mu \in R, \lambda, \mu (-\infty, \infty)$

Ако $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ и $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ то (Ф3) ще има вида

$\alpha: \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$

Векторно параметрично уравнение на равнината α

$\vec{r}$ - текущ радиус вектор на т.M

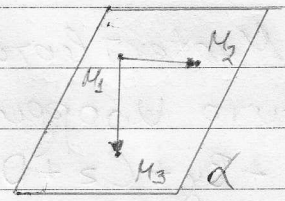
λ, μ - параметри на α

т.M - текуща точка

Нека $\alpha : \begin{cases} \in \text{т.} M_1(x_1 y_1 z_1) \\ \in \text{т.} M_2(x_2 y_2 z_2) \\ \in \text{т.} M_3(x_3 y_3 z_3) \end{cases}$

M_1, M_2 и M_3 не са колинеарни (не лежат на една права)

$$\alpha : \begin{cases} \in \text{т.} M_1 \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_2}\,(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_3}\,(x_3-x_1, y_3-y_1, y_3-y_1) \end{cases} \Rightarrow$$

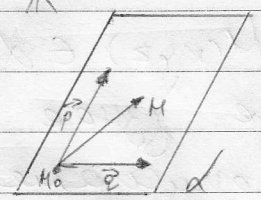


$$\alpha : \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2-x_1) + \mu(x_3-x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2-y_1) + \mu(y_3-y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2-z_1) + \mu(z_3-z_1) \end{cases}$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ (-\infty, +\infty)$

Общо уравнение на равнина в $\mathbb{R}^3$

Нека $\alpha : \begin{cases} \in \text{т.} M_0(x_0 y_0 z_0) \\ \parallel \vec{p}\,(p_1 p_2 p_3) \\ \parallel \vec{q}\,(q_1 q_2 q_3) \end{cases}$ $\quad \vec{p} \not\parallel \vec{q}$



т. $M(x y z) \in \alpha \iff \overrightarrow{M_0M}, \vec{p}, \vec{q}$ - компланарни

$\iff \overrightarrow{M_0M}\,\vec{p}\,\vec{q} = 0$ т.е $(\overrightarrow{M_0M} \times \vec{p})\vec{q} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-x_0)p_2q_3 + (y-y_0)p_3q_1 + (z-z_0)p_1q_2 - (z-z_0)p_2q_1 - (y-y_0)p_1q_3 - (x-x_0)p_3q_2$$

$$\Rightarrow (p_2q_3 - p_3q_2)x + (p_3q_1 - p_1q_3)y + (p_1q_2 - p_2q_1)z +$$

$$+ (p_3q_2 - p_2q_3)x_0 + (p_1q_3 - p_3q_1)y_0 + (p_2q_1 - p_1q_2)z_0 = 0$$

Нека $a = p_2q_3 - p_3q_2$
$b = p_3q_1 - p_1q_3$
$c = p_1q_2 - p_2q_1$
$\Rightarrow$ т.$M(x y z) \in \alpha \Rightarrow$
$ax + by + cz + d = 0$

общо уравнение на равнина в $\mathbb{R}^3$

(1) Нека α е равнина. Координатите (x,y,z) на произволна т. ρ удовлетворяват уравнение от вида

(ФН) $Ax+By+Cz+D=0$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ (2)

(ТК) Множеството от точките M с координати (x,y,z) които координати удовлетворяват уравнение от вида $Ax+By+Cz+D=0$ при условие $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ е уравнение на единствена равнина в пространството

Доказателство

т. $M(x,y,z) \in \alpha \Rightarrow ax+by+cz+d=0$

да се узнае $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

Допускаме че $a=b=c=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{vmatrix} p_2q_3-p_3q_2=0 \\ p_3q_1-p_1q_3=0 \\ p_1q_2-p_2q_1=0 \end{vmatrix}\right\} \Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{q}$$

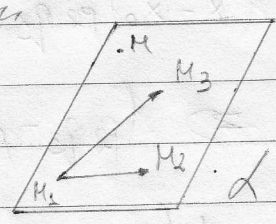
- в противоречие тъй като $\vec{p} \parallel \alpha$, $\vec{q} \parallel \alpha$, но $\vec{p} \nparallel \vec{q}$

т.е $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

Нека α - равнина $\alpha \begin{cases} \supset M_1(x_1,y_1,z_1) \\ \supset M_2(x_2,y_2,z_2) \\ \supset M_3(x_3,y_3,z_3) \end{cases}$

M_1, M_2 и M_3 не са колинеарни

$$\alpha: \left\{\begin{array}{l} \supset M_1 \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_3} \end{array}\right. \quad \text{т.} M(x,y,z) \in \alpha \Rightarrow$$

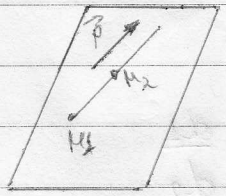


$$\alpha: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Общо уравнение на равнина през три точки

ТВ Нека $\alpha: ax+by+cz+d=0$

вектор $\vec{p}(\lambda,\mu,\nu) \parallel \alpha \Leftrightarrow a\lambda+b\mu+c\nu=0$



Нека $M_1(x_1,y_1,z_1) \in \alpha$

Избираме т. M_2, т.ч. $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{p}$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$x_2-x_1=\lambda$, $y_2-y_1=\mu$, $z_2-z_1=\nu$

$\vec{p} \parallel \alpha \Leftrightarrow M_2 \in \alpha \Rightarrow ax_2+by_2+cz_2+d=0 \Rightarrow$

$$a\lambda+b\mu+c\nu+\underbrace{ax_1+by_1+cz_1+d}_{=0}=0$$

Това е достатъчно условие

Т

Нека $\alpha: ax+by+cz+d=0$, тогава

1) $\alpha \parallel Ox \Leftrightarrow a=0$
2) $\alpha \parallel Oy \Leftrightarrow b=0$
3) $\alpha \parallel Oz \Leftrightarrow c=0$
4) $\alpha \ni O \Leftrightarrow d=0$
5) $\alpha \parallel Oxy \Leftrightarrow a=b=0$
6) $\alpha \parallel Oyz \Leftrightarrow b=c=0$
7) $\alpha \parallel Oxz \Leftrightarrow a=c=0$
8) $\alpha \equiv Oxy \Leftrightarrow a=b=d=0$
9) $\alpha \equiv Oyz \Leftrightarrow b=c=d=0$
10) $\alpha \equiv Oxz \Leftrightarrow a=c=d=0$

Доказателство

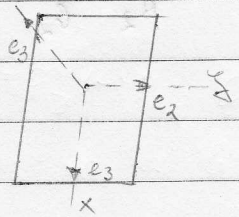
1) $\alpha \parallel Ox \Leftrightarrow \alpha \parallel \vec{p}(1,0,0) \Rightarrow a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0=0 \Rightarrow a=0$

аналогично 2) и 3)

4) $O \in \alpha \Leftrightarrow a\cdot 0+0b+c\cdot 0+d=0 \Rightarrow d=0$

5) $\alpha \parallel Oxy \Leftrightarrow \alpha \parallel Ox$ и $\alpha \parallel Oy$

аналогично 6) и 7)



Взаимно положение на две равнини

I Нека $\alpha_1 \ldots a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\alpha_2 \ldots a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Тогава $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

Нека $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, т. $M\left(\frac{-b_1y + c_1z + d_1}{a_1}, y, z\right) \in \alpha_1$ за $\forall y, \forall z \in \mathbb{R}$

от $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \Rightarrow$ т. $M \in \alpha_2 \Rightarrow$

$$a_2\left[\frac{-b_1y + c_1z + d_1}{a_1}\right] + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\left(b_2 - \frac{b_1}{a_1}a_2\right)y + \left(c_2 - \frac{c_1}{a_1}a_2\right)z + d_2 - \frac{d_1}{a_1}a_2 = 0 \ ; \ \forall y, z \in \mathbb{R}$$

Полагаме $y = 0$ и $z = 0 \Rightarrow$ от y-то получаваме

$$d_2 - \frac{d_1}{a_1}a_2 = 0 \quad (1)$$

Полагаме $y = 1$ и $z = 0 \Rightarrow$ от y-то получаваме

$$b_2 - \frac{b_1}{a_1}a_2 = 0 \quad (2)$$

Полагаме $y = 0$ и $z = 1 \Rightarrow$ от y-то получаваме

$$c_2 - \frac{c_1}{a_1}a_2 = 0 \quad (3)$$

от (1), (2) и (3) $\Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{b_2}{b_1}$

Нека $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = p \neq 0 \Rightarrow$

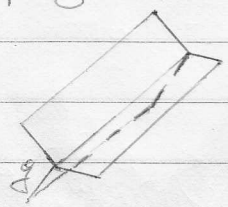
$$a_1 = pa_2, \ b_1 = pb_2, \ c_1 = pc_2, \ d_1 = pd_2$$

Т| Нека $\alpha_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
$\alpha_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Тогава $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ $(\alpha_1 \neq \alpha_2) \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$

Снопове равнини в пространството

Деф
Множеството $(S(g))$ от всички равнини в пространството $(\mathbb{R}^3)$ минаващи през g се нарича сноп равнини определен от g, g - ос на снопа



Ако $\alpha_1\alpha_2 \in S(g)$ $\alpha_1 \cap \alpha_2 = g$ то
$S(g) = \alpha(\alpha_1\alpha_2)$

Нека $\alpha_1 : \ell_1(x_1y_1z_1) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
$\alpha_2 : \ell_2(x_2y_2z_2) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Т|
За всяко $(\lambda_1\lambda_2) \neq (0,0)$ уравнението $\lambda_1\ell_1(x,y,z) + \lambda_2\ell_2(x,y,z) = 0$ е уравнение на някаква равнина $\alpha \in S(g)$

Всяка равнина $\alpha \in S(g)$ се представя с уравнението от вида $\lambda_1\ell_1(x,y,z) + \lambda_2\ell_2(x,y,z) = 0$ при условие $(\lambda_1\lambda_2) \neq (0,0)$